



Автономная некоммерческая организация высшего образования
«Волгоградский институт бизнеса»

Рабочая программа учебной дисциплины

Математическое моделирование мехатронных и робототехнических систем

(Наименование дисциплины)

15.03.06 Мехатроника и робототехника, направленность (профиль) «Мехатроника»

(Направление подготовки / Профиль)

Бакалавр

(Квалификация)

Кафедра разработчик

Естественных наук и профессиональных коммуникаций

Год набора

2027

Вид учебной деятельности	Трудоемкость (объем) дисциплины
	Очная форма
	д
Зачетные единицы	4
Общее количество часов	144
Аудиторные часы контактной работы обучающегося с преподавателями:	48
– Лекционные (Л)	24
– Практические (ПЗ)	24
– Лабораторные (ЛЗ)	
– Семинарские (СЗ)	
Самостоятельная работа обучающихся (СРО)	60
К (Р-Г) Р (П) (+;-)	
Тестирование (+;-)	
ДКР (+;-)	
Зачет (+;-)	
Зачет с оценкой (+;- (Кол-во часов))	
Экзамен (+;- (Кол-во часов))	+ (36)

Волгоград 2026

Содержание

Раздел 1. Организационно-методический раздел	3
Раздел 2. Тематический план.....	5
Раздел 3. Содержание дисциплины.....	6
Раздел 4. Организация самостоятельной работы обучающихся	8
Раздел 5. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся.....	10
Раздел 6. Оценочные средства промежуточной аттестации (с ключами).....	14
Раздел 7. Перечень учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	18
Раздел 8. Материально-техническая база и информационные технологии	19
Раздел 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	20

Раздел 1. Организационно-методический раздел

1.1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Математическое моделирование мехатронных и робототехнических систем» входит в «Часть, формируемая участниками образовательных отношений» подготовки обучающихся по направлению подготовки **15.03.06 Мехатроника и робототехника, направленность (профиль) «Мехатроника»**

Целью дисциплины является формирование **компетенций** (в соответствии с ФГОС ВО и требованиями к результатам освоения основной профессиональной образовательной программы высшего образования (ОПОП ВО)):

ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности

Дескрипторы компетенции:

ОПК-1.1. Способен применить методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования для изучения предметной области.

ОПК-1.2. Способен определить необходимость и постановку задач экспериментального исследования, средства и методы обработки экспериментальных данных.

Перечисленные компетенции формируются в процессе достижения индикаторов компетенций:

Обобщенная трудовая функция/ трудовая функция	Код и наименование дескриптора компетенций	Код и наименование индикатора достижения компетенций (из ПС)
	ОПК-1.1. Способен применить методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования для изучения предметной области. ОПК-1.2. Способен определить необходимость и постановку задач экспериментального исследования, средства и методы обработки экспериментальных данных.	Знает ИД-1 ОПК-1.1 Методы математического анализа, моделирования, теоретического и экспериментального исследования (без привязки к профессиональному стандарту); ИД-2 ОПК-1.2 Подходы к определению необходимости и постановке задач экспериментального исследования, средства и методы обработки экспериментальных данных (без привязки к профессиональному стандарту). Умеет ИД-3 ОПК-1.1 Применять методы математического анализа, моделирования и экспериментального исследования для изучения предметной области (без привязки к профессиональному стандарту); ИД-4 ОПК-1.2 Определять необходимость и формулировать задачи экспериментального исследования, выбирать средства и методы обработки экспериментальных данных (без привязки к профессиональному

		стандарту). Имеет навыки ИД-5 ОПК-1.1 Владение навыками применения методов математического анализа, моделирования и экспериментального исследования (без привязки к профессиональному стандарту); ИД-6 ОПК-1.2 Владение навыками постановки экспериментальных задач, обработки экспериментальных данных (без привязки к профессиональному стандарту).
--	--	---

**1.2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО
направления подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника, направленность (профиль)
«Мехатроника»**

№	Предшествующие дисциплины (дисциплины, изучаемые параллельно)	Последующие дисциплины
1	2	3
1.	Физика	Основы инжиниринга
	Математика	Механика

1.3. Нормативная документация

Рабочая программа учебной дисциплины составлена на основе:

- Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки **15.03.06 Мехатроника и робототехника, направленность (профиль) «Мехатроника»**;
- Учебного плана направления подготовки **15.03.06 Мехатроника и робототехника, направленность (профиль) «Мехатроника»** 2027 года набора;
- Образца рабочей программы учебной дисциплины (приказ № 113-О от 01.09.2021 г.).

Раздел 2. Тематический план
Очная форма обучения (полный срок)

№	Тема дисциплины	Трудоемкость				
		Всего	Аудиторные занятия		СРО	Код индикатора и дескриптора достижения компетенций
			Л	ПЗ (ЛЗ, СЗ)		
1	2	3	4	5	6	7
1	Тема 1. Введение в математическое моделирование.	16	4	4	8	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
2	Тема 2. Динамика механических систем роботов.	16	4	4	8	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
3	Тема 3. Представление в пространстве состояний.	16	4	4	8	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
4	Тема 4. Моделирование электрических приводов постоянного тока.	16	4	4	8	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
5	Тема 5. Математические модели бесколлекторных двигателей (<i>BLDC</i> и <i>PMSM</i>).	12	2	2	8	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
6	Тема 6. Моделирование кинематики манипуляторов.	12	2	2	8	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
7	Тема 7. Моделирование динамики замкнутых систем управления.	10	2	2	6	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
8	Тема 8. Численные методы и среды моделирования.	10	2	2	6	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
Вид промежуточной аттестации(Экзамен)		36				
Итого		144	24	24	60	

Раздел 3. Содержание дисциплины

3.1. Содержание дисциплины

Тема 1. Введение в математическое моделирование. Классификация моделей (физические, аналитические, имитационные). Основные этапы построения модели мехатронного модуля.

Тема 2. Динамика механических систем роботов. Уравнения Лагранжа II рода. Кинетическая и потенциальная энергия многозвенного манипулятора. Обобщенные координаты и силы.

Тема 3. Представление в пространстве состояний. Матричная форма записи дифференциальных уравнений. Переход от передаточных функций к описанию в переменных состояния для МИМО-систем.

Тема 4. Моделирование электрических приводов постоянного тока. Системы уравнений электрического равновесия якоря и механического равновесия вала. Метод электромеханических аналогий.

Тема 5. Математические модели бесколлекторных двигателей (BLDC и PMSM). Преобразования координат Кларка ($\alpha\beta$) и Парка (dqdq). Ориентация по полю ротора.

Тема 6. Моделирование кинематики манипуляторов. Прямая и обратная задачи кинематики. Формализм Денавита — Хартенберга для задания систем координат звеньев.

Тема 7. Моделирование динамики замкнутых систем управления. Структурные схемы САУ. Передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы. Анализ устойчивости по Ляпунову.

Тема 8. Численные методы и среды моделирования. Решение жестких систем ОДУ. Использование MATLAB/Simulink (библиотека Simscape Multibody) для виртуального прототипирования робота.

3.2. Содержание практического блока дисциплины

Очная форма обучения (полный срок)

№	Тема практического (семинарского, лабораторного) занятия
1	2
ПЗ 1	Тема 1. Введение в математическое моделирование.
ПЗ 2	Тема 2. Динамика механических систем роботов.
ПЗ 3, 4	Тема 3. Представление в пространстве состояний.
ПЗ 5	Тема 4. Моделирование электрических приводов постоянного тока.
ПЗ 6, 7	Тема 5. Математические модели бесколлекторных двигателей (BLDC и PMSM).
ПЗ 8	Тема 6. Моделирование кинематики манипуляторов.

3.3. Образовательные технологии

Очная форма обучения (полный срок)

№	Тема занятия	Вид учебного занятия	Форма / Методы интерактивного обучения	% учебного времени
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Введение в математическое моделирование.	ПЗ	Метод кейсов	75
2	Тема 2. Динамика механических систем роботов.	Л	Лекция-ситуация	25
3	Тема 3. Представление в пространстве состояний.	ПЗ	Метод кейсов	75
4	Тема 4. Моделирование электрических приводов постоянного тока.	ПЗ	Мозговой штурм	25
5	Тема 5. Математические модели	Л	Мозговой штурм	50

	бесколлекторных двигателей (<i>BLDC</i> и <i>PMSM</i>).			
6	Тема 6. Моделирование кинематики манипуляторов.	ПЗ	Метод кейсов	75
7	Тема 7. Моделирование динамики замкнутых систем управления.	ПЗ	Метод кейсов	75
8	Тема 8. Численные методы и среды моделирования.	ПЗ	Деловая игра	75
Итого				29,68%

Раздел 4. Организация самостоятельной работы обучающихся

4.1. Организация самостоятельной работы обучающихся

№	Тема дисциплины	№ вопросов	№ рекомендуемой литературы
1	2	3	4
1	Тема 1. Введение в математическое моделирование.	1, 2	1, 3, 5
2	Тема 2. Динамика механических систем роботов.	3, 4, 5, 6	1, 3, 5
3	Тема 3. Представление в пространстве состояний.	7, 8, 9	3, 4, 5
4	Тема 4. Моделирование электрических приводов постоянного тока.	10, 11, 12, 13	2, 3, 4, 5
5	Тема 5. Математические модели бесколлекторных двигателей (<i>BLDC</i> и <i>PMSM</i>).	14, 15, 16	3, 4, 5
6	Тема 6. Моделирование кинематики манипуляторов.	17, 18	2, 3, 5
7	Тема 7. Моделирование динамики замкнутых систем управления.	19-25	1, 3, 5
8	Тема 8. Численные методы и среды моделирования.	26, 27, 28	2, 3, 5, 6

Перечень вопросов, выносимых на самостоятельную работу обучающихся

1. **Применение формализма Лагранжа — Эйлера для вывода динамических уравнений** антропоморфного манипулятора с семью степенями свободы: учет центробежных и кориолисовых сил.

2. **Моделирование кинематической избыточности робота.** Использование псевдообратной матрицы Мура — Пенроуза для решения обратной задачи кинематики при наличии препятствий в рабочей зоне.

3. **Представление вращений твердого тела:** сравнительный анализ использования углов Эйлера, углов Родрига — Гамильтона (кватернионов) и матриц поворота для устранения проблемы «шарнирного замка» (*Gimbal Lock*).

4. **Математическое описание упругости звеньев промышленных роботов.** Моделирование механической руки как многозвенной системы с распределенными параметрами (уравнения в частных производных) против модели сосредоточенных масс.

5. **Идентификация параметров мехатронных модулей методом наименьших квадратов (МНК).** Обработка экспериментальных данных разгона двигателя для определения момента инерции ротора и коэффициента вязкого трения.

6. **Моделирование нелинейностей исполнительных механизмов.** Учет люфта редуктора, сухого (Кулонова) трения и насыщения усилителя мощности в структурной схеме Simulink-модели привода.

7. **Цифровое моделирование систем управления с фиксированной запятой (*Fixed-point arithmetic*).** Оценка влияния квантования сигналов АЦП/ЦАП и периода дискретизации на устойчивость контура позиционирования.

8. **Синтез наблюдателей состояния (Луенбергера и фильтра Калмана)** для оценки скоростей суставов робота по зашумленным показаниям угловых энкодеров положения.

9. **Моделирование динамики мобильных колесных роботов неголономных связей.** Математическая модель дифференциального привода и реализация алгоритма Pure Pursuit для следования траектории.

10. **Анализ устойчивости положений равновесия манипулятора по второму методу Ляпунова.** Построение функции Ляпунова для нелинейной системы управления силой захвата.

11. **Моделирование контактной динамики «робот — среда».** Реализация моделей импеданса (*Impedance Control*) и адмиттанса (*Admittance Control*) при физическом взаимодействии коллаборативного робота с человеком.

12. **Использование нейросетевых аппроксиматоров для идентификации неизвестной динамики объекта.** Применение радиально-базисных сетей (*RBF*) или многослойных перцептронов (*MLP*) для компенсации неучтенных нелинейностей в схеме вычисленного момента (*Computed Torque Control*).

13. **Моделирование тепловых процессов в сервоприводах.** Построение тепловой эквивалентной схемы (*Foster/Cauer network*) для прогнозирования перегрева обмоток *BLDC*-двигателя при циклической нагрузке.

14. **Оптимизация траекторий во времени (*Time-optimal trajectory planning*).** Решение задачи о брахистохроне для оси вращения робота с ограничениями по току, напряжению и рывку методами принципа максимума Понтрягина.

15. **Стохастическое моделирование сенсорных данных.** Фильтрация шумов MEMS-акселерометров и гироскопов IMU с помощью расширенного фильтра Калмана (*EKF*) для задач навигации мобильного робота.

4.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся обеспечивается следующими учебно-методическими материалами:

1. Указаниями в рабочей программе по дисциплине (п.4.1.)
2. Лекционные материалы в составе УМК по дисциплине
3. Заданиями и методическими рекомендациями по организации самостоятельной работы обучающихся в составе УМК по дисциплине.
4. Глоссарием по дисциплине в составе УМК по дисциплине.

Раздел 5. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся

Фонд оценочных средств по дисциплине представляет собой совокупность контролируемых материалов, предназначенных для измерения уровня достижения обучающимися установленных результатов образовательной программы. ФОС по дисциплине используется при проведении оперативного контроля и промежуточной аттестации обучающихся. Требования к структуре и содержанию ФОС дисциплины регламентируются Положением о фонде оценочных материалов по программам высшего образования – программам бакалавриата, магистратуры.

5.1. Паспорт фонда оценочных средств Очная форма обучения (полный срок)

№	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Оценочные средства			
		Л	ПЗ (ЛЗ, СЗ)	СРО	Код индикатора и дескриптора достижения компетенций
1	2	3	4	5	6
1	Тема 1. Введение в математическое моделирование.	УО		ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
2	Тема 2. Динамика механических систем роботов.	УО	КМ	ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
3	Тема 3. Представление в пространстве состояний.	ЛС	МШ	ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
4	Тема 4. Моделирование электрических приводов постоянного тока.	УО	КМ	ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
5	Тема 5. Математические модели бесколлекторных двигателей (BLDC и PMSM).	УО	МШ	ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
6	Тема 6. Моделирование кинематики манипуляторов.	УО		ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
7	Тема 7. Моделирование динамики замкнутых систем управления.	УО	КМ	ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2

8	Тема 8. Численные методы и среды моделирования.	УО	ДИ	ПРВ	ИД-1 ОПК-1.1 ИД-2 ОПК-1.2 ИД-3 ОПК-1.1 ИД-4 ОПК-1.2 ИД-5 ОПК-1.1 ИД-6 ОПК-1.2
---	---	----	----	-----	--

Условные обозначения оценочных средств (Столбцы 3, 4, 5):

УО – устный (фронтальный, индивидуальный, комбинированный) опрос;

ПРВ – проверка рефератов, отчетов, рецензий, аннотаций, конспектов, графического материала, эссе, переводов, решений заданий, выполненных заданий в электронном виде и т.д.;

МШ – Метод мозгового штурма;

КМ – Кейс-метод;

ДИ – Деловая игра;

ЛС – Лекция-ситуация.

5.2. Оценочные средства текущего контроля

Перечень практических (семинарских) заданий Задачи

1. **Вывод уравнений динамики плоского 2-звенного манипулятора.** Составление выражений кинетической и потенциальной энергии, применение уравнений Лагранжа II рода для получения нелинейных дифференциальных уравнений движения.

2. **Символьные вычисления в MATLAB Symbolic Toolbox.** Автоматизация вывода матриц масс $D(q)D(q)D(q)$, векторов кориолисовых сил $C(q, \dot{q})C(q, \dot{q})$ и гравитации $G(q)G(q)G(q)$ для антропоморфного робота 3R с помощью функции `jacobian`.

3. **Прямая задача кинематики по Денавиту — Хартенбергу.** По заданной таблице параметров Д-Х (длины звеньев и углы скручивания) расчет матрицы преобразования основания до схвата $T_{06}T_{06}$ для определения положения $(x, y, z)(x, y, z)(x, y, z)$.

4. **Решение обратной задачи кинематики аналитическим методом.** Для плоского робота 2R нахождение всех возможных конфигураций («локоть вверх/локоть вниз») углов суставов $\theta_1, \theta_2 \backslash \theta_1, \theta_2$ для достижения точки $(X, Y)(X, Y)(X, Y)$ через геометрический подход.

5. **Моделирование двигателя постоянного тока независимого возбуждения.** Сборка Simulink-модели: исследование влияния изменения напряжения якоря и потока возбуждения на вид механических характеристик $\omega(M) \backslash \omega(M) \omega(M)$.

6. ***Реализация векторного управления (FOC) PMSM-двигателем в скриптах.** Написание функций преобразований Кларка $(\alpha \backslash \alpha \backslash \alpha)$ и Парка $(dq \backslash dq \backslash dq)$ на Python/MATLAB для ориентации вектора тока по ротору.

7. **Идентификация момента инерции нагрузки.** Обработка экспериментального графика разгона привода под неизвестным грузом методом площадей или МНК для нахождения эквивалентной постоянной времени $T_m T_m T_m$.

8. **Моделирование люфта механической передачи.** Реализация блока «Dead Zone» с динамическим смещением в Simulink для исследования автоколебаний в замкнутом контуре позиционирования сервопривода оси станка.

9. **Синтез наблюдателя состояния Луенбергера.** Проектирование матрицы коэффициентов усиления LLL, обеспечивающей размещение собственных значений наблюдателя левее полюсов объекта для быстрой оценки скорости вала без тахогенератора.

10. **Анализ устойчивости по Ляпунову.** Проверка асимптотической устойчивости системы перевернутого маятника на тележке путем построения кандидата в функцию Ляпунова $V(x) \backslash V(x) \backslash V(x)$ и анализа знака её производной $\dot{V}(x) \backslash \dot{V}(x) \backslash \dot{V}(x)$.

11. **Планирование траектории во времени полиномами пятой степени.** Расчет коэффициентов квинтичного сплайна для перемещения оси из точки А в точку Б за время ТТТ при нулевых граничных условиях по скорости и ускорению.

12. **Моделирование неголономного колесного робота.** Запись уравнений связи для дифференциального привода, численное интегрирование системы ОДУ методом Рунге — Кутты 4-го порядка для построения траектории при заданных скоростях левого и правого колес.

13. **Оценка ошибки линеаризации обратной связью (*Feedback Linearization*).** Сравнение отклика полной нелинейной модели робота-манипулятора и её линеаризованной версии вблизи рабочей точки при отработке ступенчатого задания.

14. **Цифровое моделирование ПИД-регулятора с фиксированной запятой.** Исследование эффекта квантования сигнала ошибки и насыщения интегратора (*anti-windup*) при реализации алгоритма на микроконтроллере с разрядностью 16 бит.

15. ***Фильтрация данных IMU расширенным фильтром Калмана (*EKF*).** Программная реализация EKF на Python для слияния зашумленных данных гироскопа и акселерометра с целью получения сглаженной оценки угла наклона мобильного робота.

5.3. Тематика письменных работ обучающихся

Рефераты по выбранным темам выполняются в письменной форме обучающимися всех форм обучения. Учебно-методические материалы, необходимые для выполнения работ, а также примерная тематика рефератов содержатся в УМК по дисциплине.

1. **Применение формализма Лагранжа — Эйлера и Ньютона — Эйлера для моделирования динамики.** Сравнительный анализ вычислительной сложности алгоритмов при расчете уравнений движения многозвенных антропоморфных роботов.

2. **Математическое описание кинематической избыточности манипуляторов.** Использование псевдообратной матрицы Мура — Пенроуза и проекционных методов для решения обратной задачи кинематики с учетом дополнительных оптимизационных критериев (минимизация энергии, избегание сингулярностей).

3. **Представление ориентации твердого тела: углы Эйлера против кватернионов.** Проблема «шарнирного замка» (*Gimbal Lock*), интерполяция вращений (*SLERP*) и применение в инерциальной навигации беспилотников.

4. **Моделирование упругих деформаций звеньев промышленных роботов.** Переход от модели сосредоточенных масс к системам с распределенными параметрами; влияние податливости редукторов на точность контурной обработки.

5. **Идентификация параметров мехатронных объектов методом наименьших квадратов (*MНК*).** Алгоритмы рекурсивной оценки момента инерции нагрузки и коэффициентов трения в реальном времени во время эксплуатации робота.

6. **Нелинейные эффекты в исполнительных механизмах.** Математические модели люфта (*Dead-zone*), гистерезиса, сухого (Кулонова) трения и насыщения усилителей мощности, методы их программной компенсации.

7. **Цифровое моделирование систем управления с учетом эффектов квантования.** Влияние периода дискретизации (T_s) и разрядности АЦП/ЦАП на устойчивость и качество регулирования быстродействующих сервоприводов.

8. **Синтез и анализ наблюдателей состояния.** Применение фильтра Калмана (*EKF/UKF*) и наблюдателя Луенбергера для оценки неизмеряемых координат (скорости, ускорения) по зашумленным данным энкодеров.

9. **Динамика неголономных мобильных платформ.** Математическая модель дифференциального привода и условия интегрируемости связей; алгоритм *Pure Pursuit* как решение задачи следования траектории.

10. **Анализ устойчивости нелинейных систем вторым методом Ляпунова.** Построение функций Ляпунова для замкнутых систем адаптивного и робастного управления манипуляторами в условиях неопределенности параметров.

11. **Контактная динамика «робот — среда».** Моделирование импеданса (*Impedance Control*) и адмиттанса (*Admittance Control*) для обеспечения безопасного физического взаимодействия коллаборативных роботов с человеком или инструментами.

12. **Нейросетевые модели динамики роботов.** Использование радиально-базисных сетей (*RBF*) или многослойных перцептронов (*MLP*) для аппроксимации неизвестных нелинейностей в схеме вычисленного момента (*Computed Torque Control*).

13. **Тепловое моделирование силовых приводов.** Построение эквивалентных тепловых схем (*Cauer/Foster networks*) для прогнозирования температуры перегрева обмоток BLDC-двигателей при циклической нагрузке.

14. **Оптимальное по времени планирование траекторий (*Time-optimal path tracking*).** Решение задачи о брахистохроне вдоль заданного геометрического пути с учетом ограничений на рывок, ускорение и скорость осей методами принципа максимума Понтрягина.

15. **Стохастическое моделирование сенсорных данных.** Фильтрация шумов MEMS-датчиков IMU (гироскопов и акселерометров) марковскими процессами и фильтрами частиц (*Particle Filter*) для задач автономной навигации SLAM.

5.4. Перечень вопросов промежуточной аттестации по дисциплине

Список вопросов для зачета

1. **Классификация математических моделей.** Deskриптивные, оптимизационные и имитационные модели в мехатронике. Уровни абстракции при моделировании роботов (кинематика, динамика, управление).

2. **Основные принципы механики для моделирования.** Законы Ньютона — Эйлера и формализм Лагранжа II рода. Преимущества энергетического метода при выводе уравнений многозвенных систем.

3. **Обобщенные координаты и силы.** Понятие числа степеней свободы (*DOF*). Голономные и неголономные связи на примере мобильного колесного робота.

4. **Прямая задача кинематики манипуляторов.** Метод однородных преобразований Денавита — Хартенберга. Составление матрицы $T_{n0}T_{n-1}^{n0}$ для определения положения и ориентации схвата.

5. **Обратная задача кинематики.** Геометрический и алгебраический методы решения. Проблема множественности решений и сингулярностей конфигурационного пространства.

6. **Кинематическая избыточность манипуляторов.** Матрица Якоби (JJJ). Использование псевдообратной матрицы Мура — Пенроуза для оптимизации вторичных задач (избегание препятствий, минимизация моментов).

7. **Уравнения динамики Лагранжа — Эйлера.** Определение кинетической (KKK) и потенциальной (PPP) энергии системы. Формирование матриц инерции $D(q)D(q)D(q)$, кориолисовых сил $C(q, \dot{q})C(q, \dot{q})$ и гравитации $G(q)G(q)G(q)$.

8. **Пространство состояний.** Представление нелинейной динамической системы в форме $\dot{x}=f(x,u)$. Понятия управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем (LTI).

9. **Линеаризация нелинейных моделей.** Разложение в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки. Применение линеаризации обратной связью (*Feedback Linearization*) для управления роботами.

10. **Моделирование двигателей постоянного тока.** Системы дифференциальных уравнений электрического равновесия якоря и механического равновесия вала. Естественные механические характеристики.

11. **Математические модели синхронных машин с постоянными магнитами (PMSM).** Преобразования Кларка ($\alpha\beta$) и Парка (dq). Физический смысл ориентирования по полю ротора (*Field-Oriented Control*).

12. **Дискретные модели цифровых систем управления.** Z-преобразование. Влияние периода квантования (T_s) на устойчивость замкнутого контура и алиасинг сигналов датчиков.

13. **Передаточные функции и структурные схемы.** Правила преобразования структурных схем САУ. Типовые звенья и их последовательное/параллельное соединение.

14. **Анализ устойчивости линейных систем.** Алгебраический критерий Рауса — Гурвица. Частотные критерии Михайлова и Найквиста.

15. **Качество переходных процессов.** Прямые показатели качества: время нарастания, перерегулирование, время установления. Корневые оценки (степень устойчивости, колебательность).

16. **Наблюдатели состояния.** Наблюдатель Луенбергера: расчет матрицы коэффициентов усиления LLL. Принцип разделения движения ошибки наблюдения и движения объекта.

17. **Фильтр Калмана (KF, EKF, UKF).** Математическая модель предсказания и коррекции. Применение для слияния данных IMU (акселерометра и гироскопа) в навигации мобильных роботов.
18. **Нелинейные эффекты в приводах.** Математическое описание люфта (*Backlash*), сухого трения (*Coulomb friction*) и насыщения усилителя мощности (*Saturation*).
19. **Планирование траекторий во времени.** Полиномиальные сплайны (3-й и 5-й степени). Задание граничных условий по скорости и ускорению для плавного старта осей робота.
20. **Оптимальное управление.** Задача о быстродействии («банг-банг» управление). Принцип максимума Понтрягина как инструмент синтеза законов управления.
21. **Контактная динамика «робот — среда».** Моделирование импеданса (*Impedance Control*): представление взаимодействия как виртуальной массы-демпфера-пружины.
22. **Идентификация параметров объектов.** Метод наименьших квадратов (*MHK*) для экспериментального определения момента инерции нагрузки и коэффициентов вязкого трения привода.
23. **Стохастическое моделирование сенсорных данных.** Белый шум, случайные блуждания (*Random Walk*) и марковские процессы. Фильтрация шумов энкодеров цифровыми фильтрами.
24. **Численные методы интегрирования жестких ОДУ.** Сравнение явных методов (Рунге — Кутты) и неявных многошаговых методов при моделировании динамики приводов с высокой частотой собственных колебаний.
25. **Тепловое моделирование исполнительных модулей.** Эквивалентные тепловые схемы (*Foster/Cauer networks*). Расчет температуры перегрева кристалла транзистора IGBT под импульсной нагрузкой.

Раздел 6. Оценочные средства промежуточной аттестации (с ключами)

1. Закрытого типа с одним верным вариантом ответа (5 вопросов)

Прочитайте текст и выберите один правильный ответ. Какой математический формализм позволяет вывести уравнения динамики механической системы, оперируя скалярными величинами кинетической и потенциальной энергии, вместо векторных сил? а) Принцип Даламбера; б) Уравнения Лагранжа II рода; в) Метод конечных элементов (МКЭ); г) Теорема о количестве движения. **Правильный ответ: б)**

Прочитайте текст и выберите один правильный ответ. Как называется матрица частных производных скоростей по обобщенным координатам, связывающая обобщенные силы с силами в суставах робота через соотношение $\tau = J^T F$, $F = J \tau$? а) Матрица масс $D(q)$; б) Гессиан функции энергии; в) Якобиан (JJ); г) Матрица жесткости конструкции. **Правильный ответ: в)**

Прочитайте текст и выберите один правильный ответ. В каком методе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений ошибка на шаге пропорциональна пятой степени величины шага h ? а) Метод Эйлера; б) Метод трапеций; в) Метод Рунге — Кутты 4-го порядка; г) Метод сеток для уравнений в частных производных. **Правильный ответ: в)**

Прочитайте текст и выберите один правильный ответ. Какое преобразование координат используется для устранения зависимости индуктивности ротора от его углового положения в синхронном двигателе (PMSM)? а) Преобразование Лапласа; б) Преобразование Фурье; в) Преобразование Парка (dqdq); г) Z-преобразование. **Правильный ответ: в)**

Прочитайте текст и выберите один правильный ответ. Что характеризует «перерегулирование» (σ) как показатель качества переходного процесса в системе автоматического управления? а) Время достижения первого максимума; б) Относительное превышение первого пика над установившимся значением; в) Статическую ошибку в установившемся режиме; г) Скорость затухания колебаний. **Правильный ответ: б)**

2. Закрытого типа с двумя верными вариантами ответа (5 вопросов)

Прочитайте текст и выберите два правильных ответа. Какие физические эффекты учитываются матрицей кориолисовых и центробежных сил $C(q, \dot{q})$ в динамической модели манипулятора? а) Сила тяжести звеньев; б) Инерционные силы, возникающие при движении одних звеньев относительно других; в) Упругая деформация валов

редукторов; г) Центробежные силы, зависящие от квадратов скоростей суставов. **Правильный ответ: б), г)**

Прочитайте текст и выберите два правильных ответа. Выберите методы планирования траекторий, которые гарантируют нулевые начальные и конечные скорости и ускорения схвата: а) Линейная интерполяция во времени; б) Полиномы пятой степени (*quintic spline*); в) Кубические сплайны; г) Скачкообразное изменение задания (*Step input*). **Правильный ответ: б), в)**

Прочитайте текст и выберите два правильных ответа. При моделировании нелинейностей привода какие элементы вызывают появление зоны нечувствительности или петли гистерезиса на статической характеристике? а) Идеальный усилитель мощности; б) Люфт в зубчатом зацеплении редуктора; в) Сухое трение (*Coulomb friction*) в направляющих; г) Абсолютная жесткость механической передачи. **Правильный ответ: б), в)**

Прочитайте текст и выберите два правильных ответа. Какие условия должны выполняться для полной управляемости линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax + Bu$? а) Матрица $[B \ AB \ A^2B \ \dots]$ должна иметь полный ранг; б) Все собственные значения матрицы AA должны быть отрицательными; в) Система не должна иметь кратных полюсов; г) Количество входов должно быть равно количеству состояний. **Правильный ответ: а), б)**

Прочитайте текст и выберите два правильных ответа. При дискретизации непрерывной системы управления какой параметр напрямую определяет возникновение эффекта наложения частот (*Aliasing*)? а) Разрядность АЦП датчика; б) Период квантования ($T_s T_{sTs}$), нарушающий теорему Котельникова; в) Коэффициент усиления ПИД-регулятора; г) Тип используемого микроконтроллера. **Правильный ответ: а), б)**

3. На установление последовательности (5 вопросов)

Укажите правильную последовательность этапов вывода уравнений динамики манипулятора методом Лагранжа:

1. Определение кинетической ККК и потенциальной РРР энергии всей системы;
 2. Запись лагранжиана $L = K - PL = K - PL = K - P$;
 3. Выбор вектора обобщенных координат q_i ;
 4. Вычисление частных производных и подстановка в уравнение $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$.
- Правильный ответ: 3-1-2-4**

Укажите правильную последовательность операций алгоритма Денавита — Хартенберга при прямой кинематике:

1. Назначение систем координат звеньям согласно правилам осей Z_{i-1} и Z_i ;
 2. Составление таблицы четырех параметров $(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i)$;
 3. Перемножение матриц однородных преобразований T_{i-1}^{i-1} ;
 4. Получение итоговой матрицы положения инструмента T_0^n .
- Правильный ответ: 1-2-3-4**

Укажите правильную последовательность действий цифрового фильтра Калмана (EKF) в цикле работы навигации дрона:

1. Коррекция оценки состояния по данным GPS/акселерометра (Update);
 2. Предсказание следующего состояния на основе модели движения (Predict);
 3. Инициализация априорной оценки и ковариации ошибки;
 4. Вычисление коэффициента усиления Калмана.
- Правильный ответ: 3-2-4-1**

Укажите правильную последовательность процессов при линеаризации обратной связью (Feedback Linearization) нелинейного привода:

1. Компенсация известных нелинейностей $C(q, \dot{q})$ и $G(q)$;
 2. Измерение текущего состояния $q, \dot{q}$;
 3. Формирование нового управляющего сигнала v как входа для виртуальной линейной системы;
 4. Добавление внешней ПИД-составляющей к сигналу v .
- Правильный ответ: 2-1-3-4**

Укажите правильную последовательность этапов идентификации параметра момента инерции J методом наименьших квадратов:

1. Проведение эксперимента по разгону двигателя с фиксацией тока и ускорения;
2. Формирование переопределенной системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$; $Ax=b$; $Ax=b$;
3. Решение нормального уравнения $(ATA)x=ATb$ ($A^T A$) $x = A^T b$ (ATA) $x=ATb$;
4. Оценка точности полученного результата по остаточной дисперсии. **Правильный ответ: 1-2-3-4**

4. На установление соответствия (4 вопроса)

Установите соответствие между типом математической модели и её описанием:

А) Стохастическая модель	1) Описание системы набором дифференциальных уравнений без учета случайных факторов
Б) Детерминированная модель	2) Модель, включающая вероятностные распределения шумов датчиков и возмущений
В) Имитационная модель	3) Воспроизведение логики функционирования объекта во времени средствами ЭВМ

Правильный ответ: А – 2, Б – 1, В – 3

Установите соответствие между видом преобразования координат и его назначением в теории электропривода:

А) Преобразование Кларка (α/β)	1) Переход от неподвижной трехфазной системы к эквивалентной двухфазной
Б) Преобразование Парка (d/q)	2) Переход от неподвижной системы к вращающейся вместе с ротором
В) Обратное преобразование Парка	3) Формирование ШИМ-сигналов для фазных напряжений из вращающихся векторов

Правильный ответ: А – 1, Б – 2, В – 3

Установите соответствие между критерием устойчивости и областью его применения:

А) Критерий Найквиста	1) Анализ расположения корней характеристического полинома на комплексной плоскости
Б) Критерий Гурвица	2) Исследование устойчивости по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы
В) Прямой метод Ляпунова	3) Анализ устойчивости нелинейных систем без решения дифференциальных уравнений

Правильный ответ: А – 2, Б – 1, В – 3

Установите соответствие между элементом структурной схемы САП и его математическим описанием:

А) Аperiодическое звено 1-го порядка	1) Передаточная функция $W(s) = k / s$
Б) Интегрирующее звено	2) Передаточная функция $W(s) = k / (Ts + 1)$
В) Звено чистого запаздывания	3) Передаточная функция $W(s) = e^{-\tau s}$

Правильный ответ: А – 2, Б – 1, В – 3

5. Открытого типа с одним-двумя словами (2 вопроса)

Прочитайте текст и запишите правильный ответ. Ответ следует записать с маленькой буквы. Точка в пространстве конфигураций робота, где якобиан теряет ранг и теряется подвижность по одной или нескольким осям, называется _____. **Правильный ответ: сингулярность**

Прочитайте текст и запишите правильный ответ. Ответ следует записать с маленькой буквы. Явление в цифровых системах управления, возникающее при слишком низкой частоте дискретизации, когда высокочастотные компоненты сигнала воспринимаются как низкочастотные, называется _____. **Правильный ответ: алиасинг (или наложение спектров)**

6. Открытого типа с определением понятия (расширенный ответ) (2 вопроса)

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ. Ответ следует записать с маленькой буквы: дайте определение понятию «матрица масс» $D(q)$ в уравнениях Лагранжа — Элера — это ... **Правильный ответ: симметричная положительно определенная матрица коэффициентов при вторых производных обобщенных координат,**

характеризующая инерционные свойства механизма и их зависимость от текущей конфигурации суставов.

*Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ. Ответ следует записать с маленькой буквы: опишите физический смысл принципа максимума Понтрягина применительно к задаче оптимального по быстродействию управления приводом. **Правильный ответ:** принцип утверждает, что оптимальное управление переводит систему из одного состояния в другое за минимальное время, если оно принимает только предельные (граничные) значения («банг-банг»), а гамильтониан системы вдоль оптимальной траектории достигает максимума и остается постоянным.*

Раздел 7. Перечень учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

7.1. Основная литература

1. Иванов, В. К. Управление, моделирование и датчики мехатронных систем : учебное пособие / В. К. Иванов. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. – 212 с. – ISBN 978-5-9729-2590-2. – Текст : непосредственный.

2. Архипов, М. В. Основы мехатроники и мобильной робототехники : учебник для среднего профессионального образования / М. В. Архипов, М. В. Вартанов, Р. С. Мищенко. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2025. – 170 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-13082-9. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

7.2. Дополнительная литература

3. Корнеев, С. С. Технология мехатронных систем : учебник / С. С. Корнеев, В. М. Корнеева, А. Л. Галиновский. – Москва : КноРус, 2024. – 514 с. – ISBN 978-5-406-13368-2. – Текст : непосредственный.

4. Колошкина, И. Е. Автоматизация проектирования технологической документации мехатронных и робототехнических систем : учебник и практикум для вузов / И. Е. Колошкина. – Москва : Издательство Юрайт, 2024. – 232 с. – ISBN 978-5-534-15090-2. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

5. Дреус, Ю. Г. Имитационное и математическое моделирование систем управления : учебник и практикум для вузов / Ю. Г. Дреус, В. В. Золотарёв. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2024. – 301 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-15901-1. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронно-библиотечная система -Цифровой образовательный ресурс IPR SMART – электронная библиотека по всем отраслям знаний [Электронный ресурс]. – URL:
2. <http://www.iprbookshop.ru>
3. Справочник математических формул <http://www.pm298.ru/>
4. Каталог ГОСТов - <https://snip.ruscable.ru/>
5. <http://www.consultant.ru/>— Консультант Плюс
6. <http://www.garant.ru/>— Гарант
7. Программное обеспечение для организации конференции.

Раздел 8. Материально-техническая база и информационные технологии

8.1. Учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий (для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся всех направлений подготовки).

Учебная аудитория оборудована:

- Стол для преподавателя
- Стул для преподавателя
- Столы для обучающихся
- Стулья для обучающихся
- Моноблок для преподавателя с выходом в интернет
- ЖК панель
- Компьютеры для обучающихся с выходом в интернет
- комплект учебно-наглядных пособий по дисциплине

Программные средства для проведения практических занятий:

- nanoCAD2025 на 20 посадочных мест.

8.2. Помещение для самостоятельной работы обучающихся (помещение общего пользования с подключением к системам телекоммуникации и с обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду (доступ в сеть Интернет, Wi-Fi, глобальные поисковые системы, электронная почта и т.д.)

Специализированная мебель и технические средства обучения:

- Стол для преподавателя
- Стул для преподавателя
- Столы для обучающихся
- Стулья для обучающихся
- Компьютеры для преподавателя с выходом в интернет
- Компьютеры для обучающихся выходом в интернет
- ПО: MS Office, Яндекс браузер
- Цифровой образовательный ресурс IPR SMART
- доступ в ЭИОС.

Раздел 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины «**Математическое моделирование мехатронных и робототехнических систем**» можно построить в соответствии со списком вопросов для подготовки к экзамену. Для эффективного изучения курса рекомендуется следующий порядок:

Сначала изучаются теоретические вопросы по соответствующей теме с проработкой как конспектов лекций, так и учебников. **Лекции** дают систематизированные основы научных знаний по соответствующей теме, концентрируют внимание на наиболее сложных узловых вопросах. Особое внимание следует обратить на **понимание смысла** основных понятий, определений. Затем нужно самостоятельно **подробно разобрать типовые примеры**, выясняя в деталях **практическое значение выученного теоретического материала**.

Добросовестное изучение всего материала, заключённого в лекциях, практических занятиях и домашних заданиях, гарантирует каждому обучающемуся успешные результаты на экзаменах. Для подготовки к экзамену необходимо, прежде всего, по лекциям и учебникам повторить и систематизировать весь теоретический материал, изученный в семестре.

При ответе на теоретические вопросы на экзамене следует привести необходимые определения, формулировку и примеры. Решение задач (если они есть в билете) следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения.

Во время экзамена требуется иметь калькулятор для выполнения расчетных заданий.

Не забудьте обратить внимание на применение рассматриваемых вопросов и задач в будущей профессиональной деятельности. Понимание необходимости и возможности такого применения оценивается на экзамене очень высоко.

Учебно-методическое издание

Рабочая программа учебной дисциплины

**Математическое моделирование мехатронных и
робототехнических систем**

*(Наименование дисциплины в соответствии с учебным
планом)*

Грачева Светлана Валентиновна

(Фамилия, Имя, Отчество составителя)